Richiami di cinematica

Prof. Giorgio Buttazzo

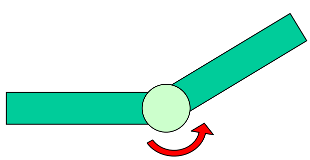
Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Pavia
E-mail: buttazzo@unipv.it

Sistemi robotici

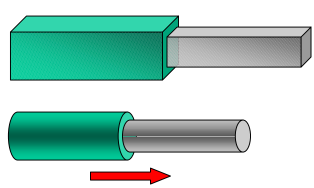
Sono sistemi costituiti da un insieme di corpi rigidi (**link**) connessi mediante **giunti** attuati.

DOF (degrees of freedom) = numero di giunti indipendenti

Tipi di giunto

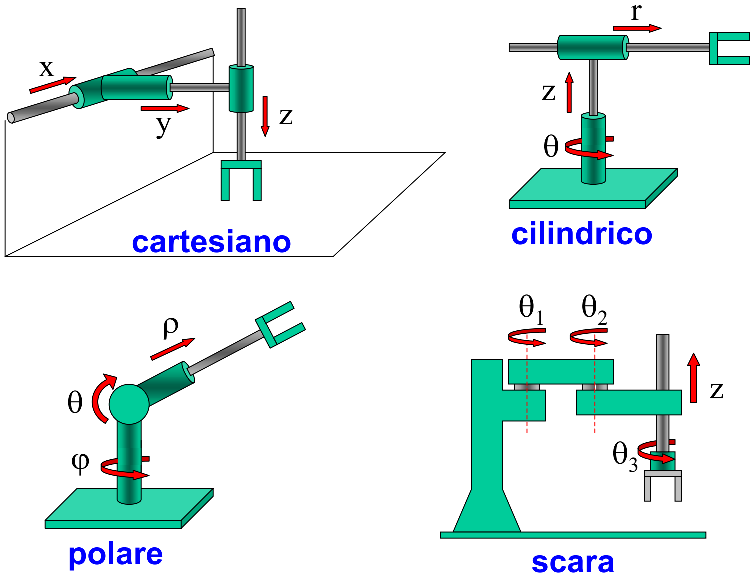


rotazionale

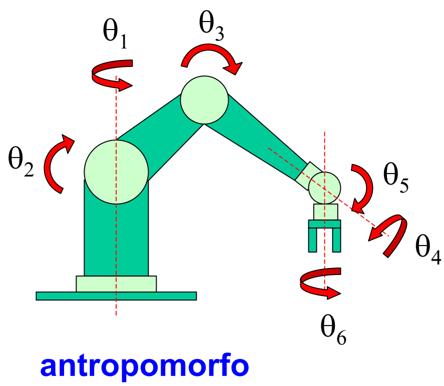


prismatico

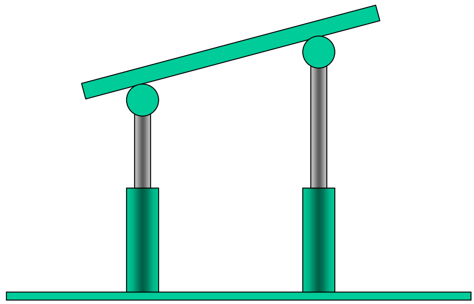
Tipi di robot



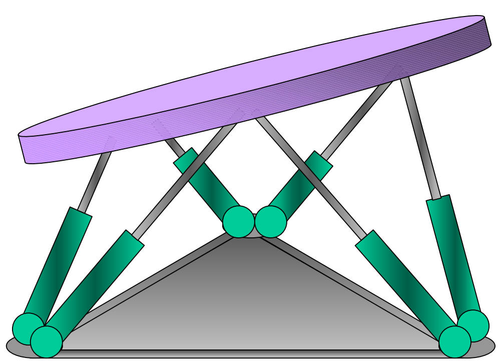
Manipolatori antropomorfi



Robot paralleli



Robot paralleli

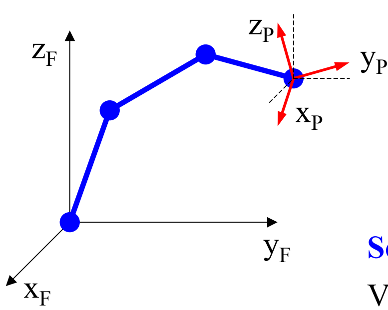


Piattaforma di Stuart

7

Problema cinematico

Posizionare la pinza nello spazio in una data posizione e con un dato orientamento rispetto ad un sistema di riferimento assoluto.



Locazione (x, y, z, α, θ, φ)

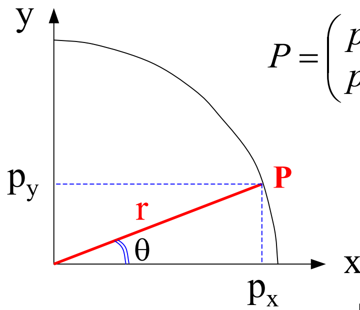
sestupla che specifica posizione e orientamento di una terna rispetto a un sistema di riferimento

Soluzione cinematica

Valori dei giunti che portano la pinza nella locazione desiderata

8

Richiami di trogonometria



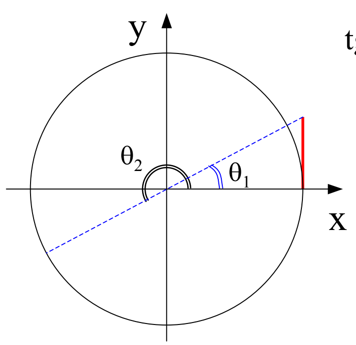
$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \qquad tg\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{p_y}{p_x}$$

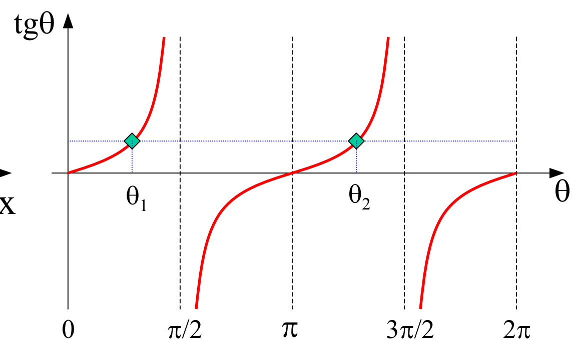
$$\theta = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Richiami di trogonometria

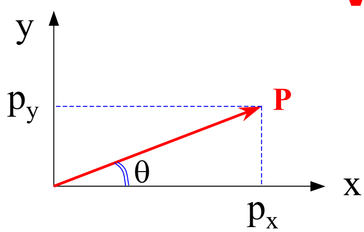




Per risolvere il dubbio sul doppio angolo si usa:

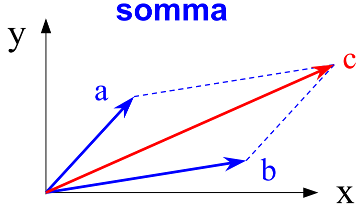
$$\theta = \mathrm{atan2}(p_y, p_x)$$

Vettori



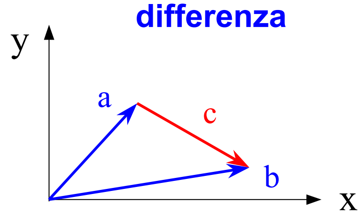
$$P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} |P| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{p_y}{p_x}\right) \end{cases}$$

somma



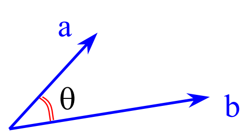
$$c = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

differenza



$$c = \begin{pmatrix} b_x - a_x \\ b_y - a_y \end{pmatrix}$$

Prodotto scalare



$$\boxed{a \bullet b \;=\; |a|\;|b|\;\cos\theta = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i}$$

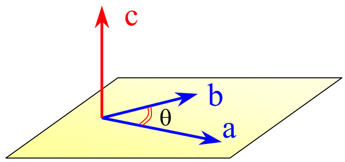
$$a \bullet b \;=\; b \bullet a$$

Esempio:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$a \bullet b \;=\; a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Prodotto vettoriale



$$\begin{cases} a \wedge b = c \\ |c| = |a|\,|b|\,\sin\theta \\ a \wedge b = -b \wedge a \end{cases}$$

⇒ **c** giace sulla perpendicolare al piano di **a** e **b**

⇒ il verso di **c** è dato dalla regola della mano destra o dalla regola della vite

$$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \qquad a \wedge b = \begin{pmatrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix}$$

Matrici

Determinante

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

E' definito solo per matrici quadrate.
Per una matrice 2x2 vale:

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Per matrici nxn si ha:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} \det A_{ik}}$$

(sviluppo sulla riga i)

oppure:

$$\boxed{\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} \det A_{kj}}$$

(sviluppo sulla colonna j)

A_{ik} è la matrice (*n-1*)x(*n-1*) ottenuta da A eliminando la riga *i* e la colonna *k*.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sviluppando sulla riga 1 si ha:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ \cancel{0} & 3 & 2 \\ \cancel{1} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A_{11} = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ 0 & \cancel{3} & 2 \\ 1 & \cancel{1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A_{12} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -2$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{-1} \\ 0 & 3 & \cancel{2} \\ 1 & 1 & \cancel{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A_{13} = 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = -3$$

quindi: $\det A = 1 \cdot \det A_{11} - 2 \cdot \det A_{12} - 1 \cdot \det A_{13} = 8$

Matrici

Trasposta

La trasposta di A è la matrice A^T che si ottiene da A scambiando le righe con le colonne:

$$A = [\, a_{ij} \,]_{n,m} \quad \Rightarrow \quad A^T = [\, a_{ji} \,]_{m,n}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrici

Inversa

E' definita solo per matrici quadrate con determinante diverso da zero:

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{\det A}$$

dove adj$A$ (detta aggiunta di A) è una matrice nxn i cui elementi valgono:

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ji}$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad adj\ A = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

(verificare che $A\,A^{-1} = \mathrm{I}$)

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{\det A} = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Algebra delle matrici

Se $A = [\ a_{ij}\ ]_{n,m}$ $\qquad B = [\ b_{ij}\ ]_{n,m}$

Somma $\qquad A + B = \mathrm{C} = [\ a_{ij} + b_{ij}\ ]_{n,m}$

Sottrazione $\qquad A - B = \mathrm{C} = [\ a_{ij} - b_{ij}\ ]_{n,m}$

Prodotto $\qquad$ Se $A = [\ a_{ij}\ ]_{n,p}$ $\qquad B = [\ b_{ij}\ ]_{p,m}$

$$A\,B = \mathrm{C} = [\ c_{ij}\ ]_{n,m}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Esempio

$$\underset{2\text{ x }3}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underset{3\text{ x }4}{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcolo dell'elemento c_{ij}:

riga i di A colonna j di B

$$[\, a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \,] \qquad \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{c_{ij} = c_{i1}\, b_{1j} + c_{i2}\, b_{2j} + c_{i3}\, b_{3j}}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 & 3 \\ 8 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrici: proprietà

$A + B = B + A$	somma commutativa
$(A+B) + C = A + (B+C)$	somma associativa
$(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$	prodotto associativo
$A(B + C) = AB + AC$	distributiva
$A\,B \neq B\,A$	**prodotto non commutativo**

Matrici: altre proprietà

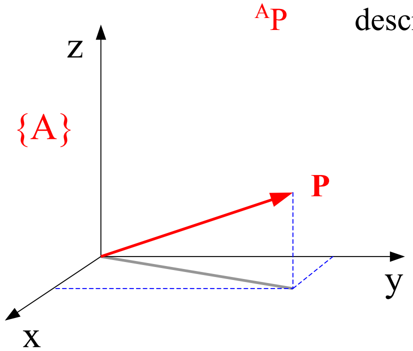
$(A^T)^T = A$ $(A+B)^T = A^T + B^T$ $(A\,B)^T = B^T A^T$	$\det(A^T) = \det(A)$ $\det(AB) = \det A \det B$ $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$
$A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$ $(A^{-1})^{-1} = I$ $(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$	**rango**: massimo numero di colonne indipendenti $\mathbf{V_1}$ e $\mathbf{V_2}$ sono indipendenti se $\nexists\, k \neq 0 : \mathbf{V_1} = k\mathbf{V_2}$ **rango(A) = n** ⇨ **det(A) ≠ 0** **rango(A) < n** ⇨ **det(A) = 0**

Descrizione spaziale

Posizione

{A} sistema di riferimento cartesiano

^{A}P descrizione di **P** rispetto ad {A}

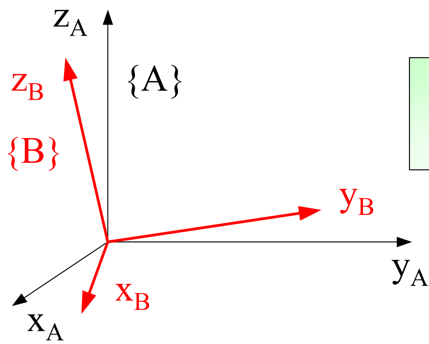


$$ {}^{A}P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} $$

Descrizione spaziale

Rotazione

La rotazione di una terna {B} rispetto ad una terna {A}
si definisce esprimendo i tre versori di {B} rispetto ad {A}:



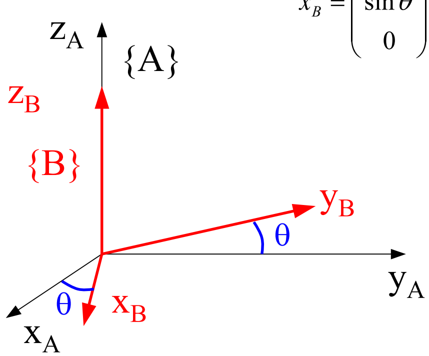
$$ {}^{A}R_B = \left[{}^{A}X_B \quad {}^{A}Y_B \quad {}^{A}Z_B \right] $$

Matrice di rotazione

Esempio

Se la terna {B} è ruotata di θ intorno a z_B si ha:

$$ {}^{A}x_B = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad {}^{A}y_B = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad {}^{A}z_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} $$



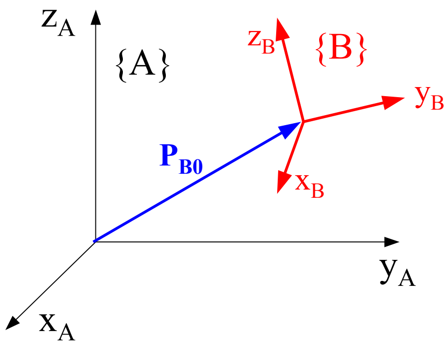
$$ {}^{A}R_B = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Matrice di rotazione

Descrizione spaziale

Frame

Una terna {B} è completamente descritta dalla posizione della sua origine e dalla rotazione dei sui assi rispetto ad {A}:



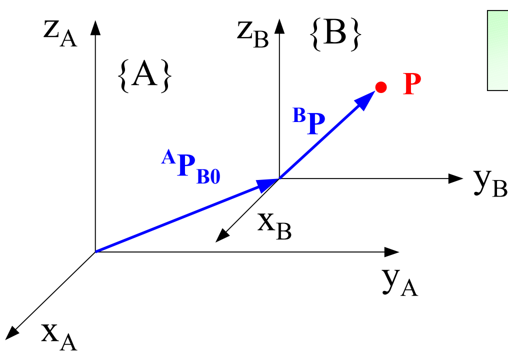
$$\left\{ {}^{A}R_{B},\ {}^{A}P_{B0} \right\}$$

Frame

Trasformazioni

Consentono di cambiare la descrizione di un oggetto da una terna di riferimento ad un'altra.

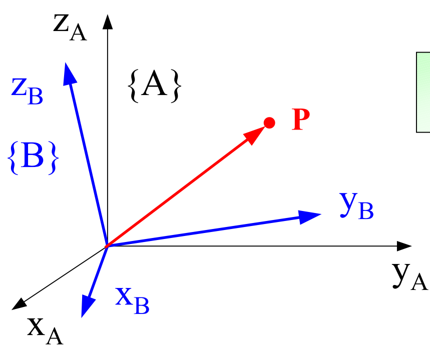
Traslazioni pure



$${}^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{B0}$$

Trasformazioni

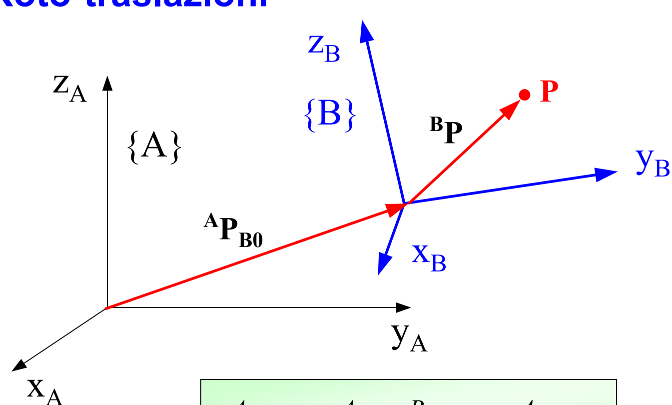
Rotazioni pure



$$^{A}P = {}^{A}R_{B}\,{}^{B}P$$

Trasformazioni

Roto-traslazioni



$$^{A}P = {}^{A}R_{B}\,{}^{B}P + {}^{A}P_{B0}$$

Trasformazioni omogenee

Consentono di descrivere una roto-traslazione per mezzo di un operatore matriciale:

$$^{A}P = {}^{A}R_{B}\,{}^{B}P + {}^{A}P_{B0}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{^{A}P = {}^{A}T_{B}\,{}^{B}P}$$

Trasformazioni omogenee

Utilizzano una rappresentazione vettoriale in $\Re^4$

	$\Re^3$		$\Re^4$
punti:	$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$	$\Rightarrow$	$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$
vettori:	$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$	$\Rightarrow$	$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$
frame:	$\{{}^{A}R_{B},\ {}^{A}P_{B0}\}$	$\Rightarrow$	$\left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}R_{B} & & {}^{A}P_{B0} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Trasformazioni omogenee

Nello spazio omogeneo si ha:

$$\boxed{{}^{A}P = {}^{A}T_{B}\,{}^{B}P}$$

dove: $${}^{A}T_{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}R_{B} & & {}^{A}P_{B0} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Infatti:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}R_{B} & & {}^{A}P_{B0} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}R_{B}\,{}^{B}P + {}^{A}P_{B0} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esempi

Traslazioni pure

$${}^{A}TRANS_{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Rotazioni pure

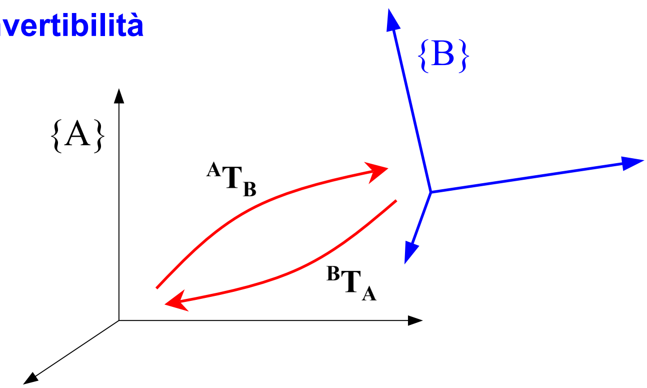
$${}^{A}ROT_{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Roto-traslazioni

$${}^{A}T_{B} = \left[\begin{array}{ccc|c} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Trasformazioni omogenee: proprietà

Invertibilità



$$\boxed{{}^{B}T_{A} = ({}^{A}T_{B})^{-1}}$$

Trasformazioni omogenee: proprietà

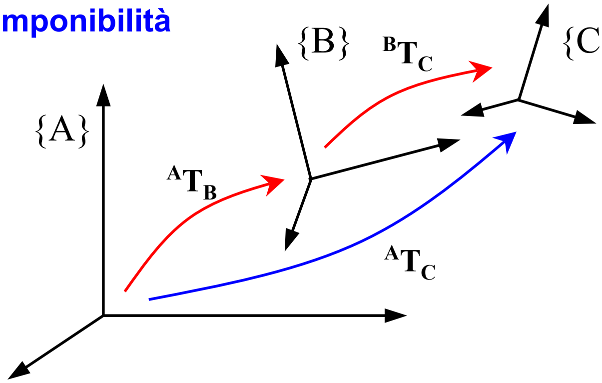
NOTA: L'inversa di una matrice con colonne ortonormali è uguale alla sua trasposta

Quindi si ha:

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z & -p \bullet n \\ o_x & o_y & o_z & -p \bullet o \\ a_x & a_y & a_z & -p \bullet a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Trasformazioni omogenee: proprietà

Componibilità



$$\boxed{^{A}\mathbf{T}_{C} = {}^{A}\mathbf{T}_{B}\,{}^{B}\mathbf{T}_{C}}$$

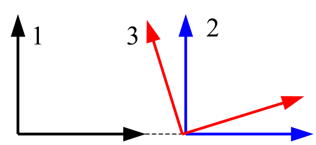
Trasformazioni omogenee: proprietà

La componibilità non è commutativa

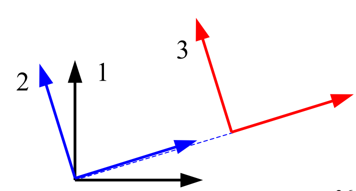
$$\boxed{\mathbf{T}_1\,\mathbf{T}_2 \neq \mathbf{T}_2\,\mathbf{T}_1}$$

Sia: $T_1 = \mathrm{TRANS}(x, L)$ $T_2 = \mathrm{ROT}(z, \theta)$

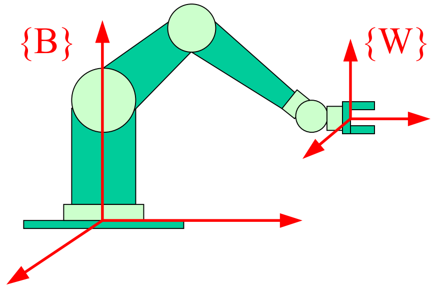
$$T_1T_2 = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & L \\ s_\theta & c_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$T_2T_1 = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta & 0 & Lc_\theta \\ s_\theta & c_\theta & 0 & Ls_\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Cinematica dei robot



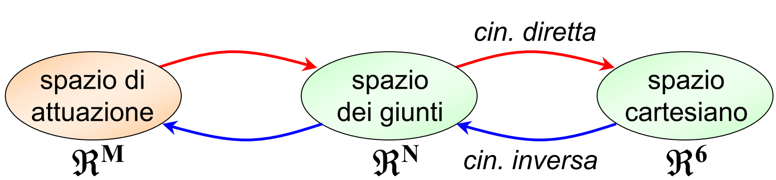
Cinematica diretta: $^{B}T_{W}(\theta_1 , \ldots , \theta_n)$

Cinematica inversa: $\theta_i = f_i(\underbrace{x, y, z, \alpha, \beta, \gamma}_{\text{locazione del polso}})$

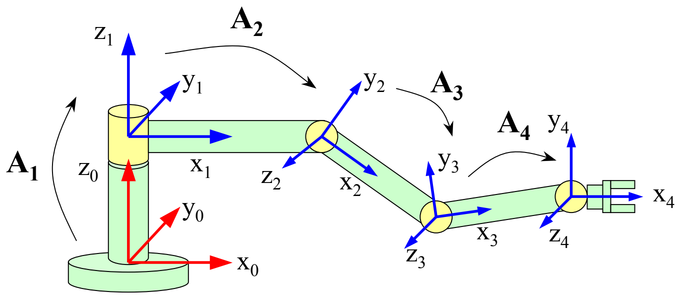
Spazi di rappresentazione

La configurazione di un manipolatore a **N** gradi di libertà può essere descritta nei seguenti spazi di rappresentazione:

Spazio cartesiano:	$\mathbf{P} \in \Re^6$	vettore che esprime la locazione del polso
Spazio dei giunti:	$\theta \in \Re^N$	vettore delle variabili dei giunti
Spazio di attuazione:	$\alpha \in \Re^M$	vettore delle variabili dei motori (M ≥ N)



Convenzioni



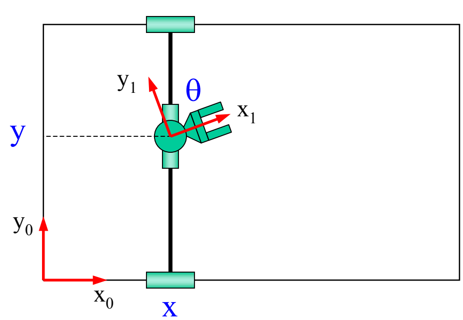
A$_i$ = trasformazione omogenea che descrive {i} rispetto a {i –1}

T$_i$ = trasformazione omogenea che descrive {i} rispetto a {0}

$$\mathbf{A_i} = {}^{i-1}\mathbf{T_i}$$

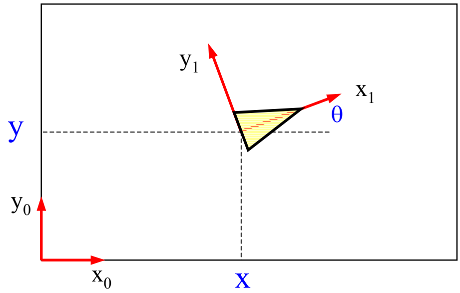
$$\mathbf{T_i} = \mathbf{A_1 A_2 \cdots A_i}$$

Esempio 1: robot cartesiano 2D



$$T_1 = \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta & x \\ s_\theta & c_\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 2: rotazioni oggetti 2D

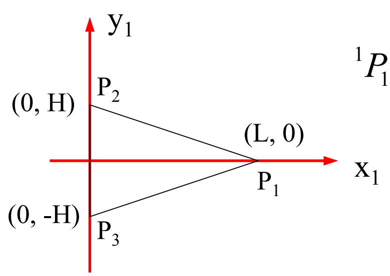


$$T_1 = \begin{pmatrix} c_\theta & -s_\theta & x \\ s_\theta & c_\theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema:

Trovare le coordinate dei vertici del triangolo nello spazio di riferimento fisso

Esempio 2: calcolo coordinate



$${}^1P_1 = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad {}^1P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ H \\ 1 \end{pmatrix} \quad {}^1P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -H \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{{}^0P_i = T_1\,{}^1P_i}$$

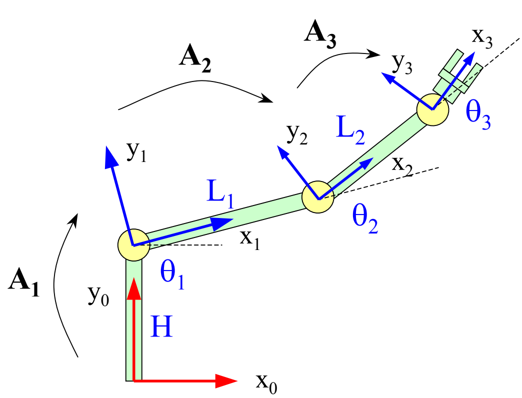
$${}^0P_1 = \begin{pmatrix} x + Lc_\theta \\ y + Ls_\theta \\ 1 \end{pmatrix} \quad {}^0P_2 = \begin{pmatrix} x - Hs_\theta \\ y + Hc_\theta \\ 1 \end{pmatrix} \quad {}^0P_3 = \begin{pmatrix} x + Hs_\theta \\ y - Hc_\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 2: programma

```
xold  =  yold  =  0;
t = current_time();
Ts = sampling_period;

while (1) {
     input(v, teta);
     vx = v * cos(teta);
     vy = v * sin(teta);
     x = xold + vx*Ts;
     y = yold + vy*Ts;
     delete_object(xold, yold);
     draw_object(x, y);
     xold = x; yold = y;
     t = t + Ts;
     block_until(t);
}
```


Esempio 3: robot a 3 dof

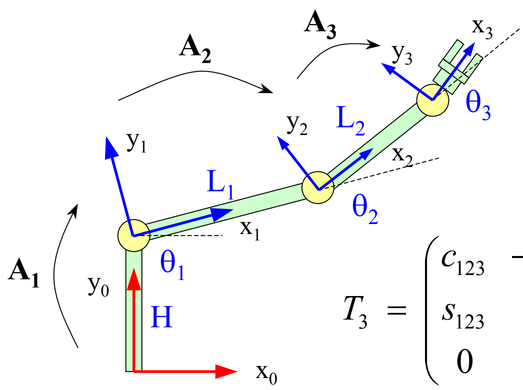


$$A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & H \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & L_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} c_3 & -s_3 & L_2 \\ s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esempio 3: calcolo di T_3



$$T_3 = A_1 A_2 A_3$$

$$T_3 = \begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & H + L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

simbologia

$s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2)$
$c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2)$

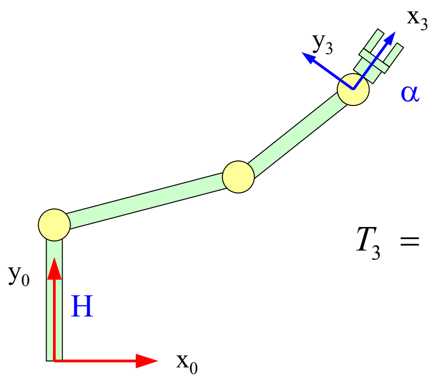
$s_{123} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$
$c_{123} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

Cinematica inversa - 1

Consiste nel ricavare le coordinate del polso in funzione delle coordinate dei giunti:

Il polso è descritto dalla trasformazione $\mathbf{T}^*$

$$T^* = \begin{pmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & x \\ s_\alpha & c_\alpha & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$T_3 = \begin{pmatrix} c_{123} & -s_{123} & L_1c_1 + L_2c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & H + L_1s_1 + L_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cinematica inversa - 2

Eguagliando $\mathbf{T}^*$ con $\mathbf{T}_3$ si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 & (1) \\ x = L_1 c_1 + L_2 c_{12} & (2) \\ y = H + L_1 s_1 + L_2 s_{12} & (3) \end{cases}$$

Riscriviamo la (2) e la (3) come segue:

$$\begin{cases} x = L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ y - H = L_1 s_1 + L_2 s_{12} \end{cases}$$

Quadrando e sommando si ha:

Cinematica inversa - 3

$$x^2 + (y - H)^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2c_2$$

Da cui si ricava:

$$\begin{cases} c_2 = \dfrac{x^2 + (y-H)^2 - L_1^2 - L_2^2}{2L_1L_2} \\ s_2 = \pm\sqrt{1 - c_2^2} \end{cases}$$

La scelta del segno dipende dalla configurazione del gomito desiderata:

- $-$ $\Rightarrow$ gomito in su
- $+$ $\Rightarrow$ gomito in giù

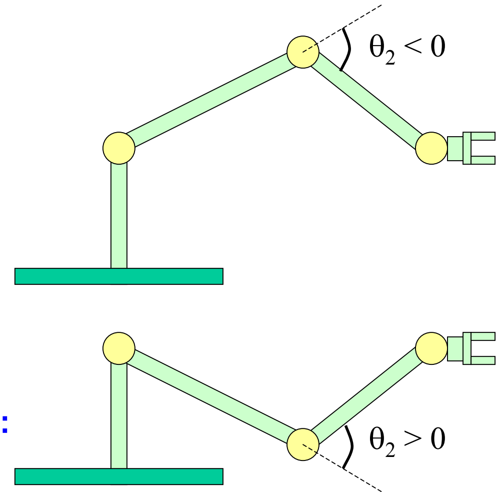
E quindi:

$$\boxed{\theta_2 = \mathrm{atan2}(s_2, c_2)}$$

Cinematica inversa - 4

Configurazione gomito su ($\theta_2 < 0$):

Configurazione gomito giù ($\theta_2 > 0$):



Cinematica inversa - 5

Ricavato θ_2, risolviamo la (2) e la (3) in termini di θ_1:

$$\begin{cases} x = L_1c_1 + L_2c_1c_2 - L_2s_1s_2 = (L_1 + L_2c_2)c_1 - (L_2s_2)s_1 \\ y - H = L_1s_1 + L_2s_1c_2 + L_2c_1s_2 = (L_1 + L_2c_2)s_1 + (L_2s_2)c_1 \end{cases}$$

Ponendo $\begin{cases} k_1 = L_1 + L_2c_2 \\ k_2 = L_2s_2 \end{cases}$

si ha: $\begin{cases} x = k_1c_1 - k_2s_1 \\ y - H = k_1s_1 + k_2c_1 \end{cases}$

Cinematica inversa - 6

Scriviamo k_1 e k_2 come:

$$\begin{cases} k_1 = r\cos\gamma \\ k_2 = r\sin\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ \gamma = \text{atan2}(k_2, k_1) \end{cases}$$

Quindi: $$\begin{cases} x = rc_\gamma c_1 - rs_\gamma s_1 = r\cos(\gamma+\theta_1) \\ y - H = rc_\gamma s_1 + rs_\gamma c_1 = r\sin(\gamma+\theta_1) \end{cases}$$

Ovvero: $$\tan(\gamma+\theta_1) = \frac{y-H}{x}$$

Cinematica inversa - 7

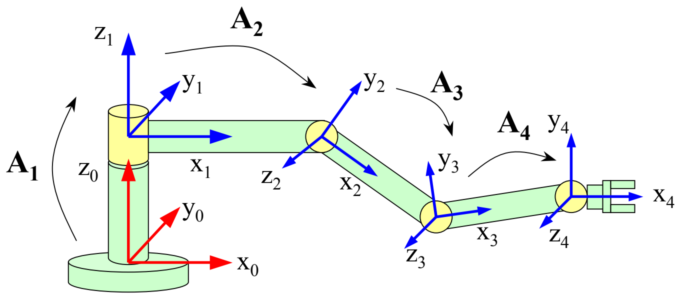
E quindi: $$\boxed{\theta_1 = \text{atan2}(y-H,\ x) - \gamma}$$

dove: $$\gamma = \text{atan2}(k_2, k_1) = \text{atan2}(L_2 s_2,\ L_1 + L_2 c_2)$$

Infine, dalla (1) si ricava:

$$\boxed{\theta_3 = \alpha - \theta_1 - \theta_2}$$

Robot a 4 dof: calcolo matrici A_1 e A_2



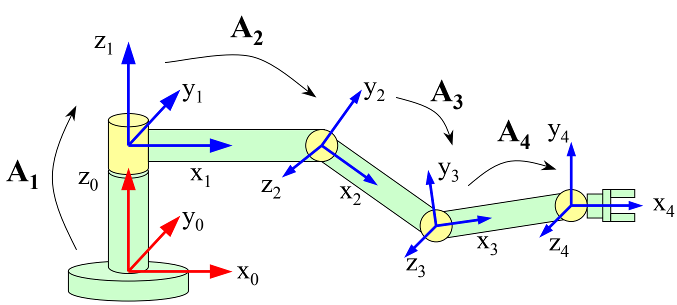
$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

simbologia

$s_i = \sin \theta_i$

$c_i = \cos \theta_i$

Robot a 4 dof: calcolo matrici A_3 e A_4



$$A_3 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & L_2 \\ s_3 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & L_3 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

simbologia

$s_i = \sin \theta_i$

$c_i = \cos \theta_i$

Robot a 4 dof: calcolo matrice T_4

$$A_1A_2 = \begin{bmatrix} c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & L_1c_1 \\ s_1c_2 & -s_1s_2 & -c_1 & L_1s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3A_4 = \begin{bmatrix} c_{34} & -s_{34} & 0 & L_2+L_3c_3 \\ s_{34} & c_{34} & 0 & L_3s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

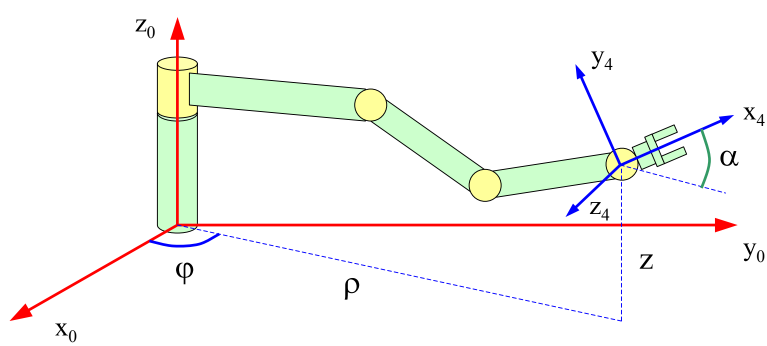
$$T_4 = A_1A_2A_3A_4 = \begin{bmatrix} c_1c_{234} & -c_1s_{234} & s_1 & c_1(L_1+L_2c_2+L_3c_{23}) \\ s_1c_{234} & -s_1s_{234} & -c_1 & s_1(L_1+L_2c_2+L_3c_{23}) \\ s_{234} & c_{234} & 0 & L_2s_2+L_3s_{23}+H \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

simbologia

$s_{23} = \sin(\theta_2+\theta_3)$
$c_{23} = \cos(\theta_2+\theta_3)$

$s_{234} = \sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$
$c_{234} = \cos(\theta_2+\theta_3+\theta_4)$

Robot a 4 dof: cinematica inversa - 1



Il polso è descritto dalla trasformazione:

$$T^* = \begin{bmatrix} c_\varphi c_\alpha & -c_\varphi s_\alpha & s_\varphi & \rho c_\varphi \\ s_\varphi c_\alpha & -s_\varphi s_\alpha & -c_\varphi & \rho s_\varphi \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Robot a 4 dof: cinematica inversa - 2

Eguagliando $\mathbf{T}^*$ con $\mathbf{T_4}$ si ottiene:

$$\begin{cases} \alpha = \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 & (1) \\ \varphi = \theta_1 & (2) \\ \rho - L_1 = L_2 c_2 + L_3 c_{23} & (3) \\ z - \mathrm{H} = L_2 s_2 + L_3 s_{23} & (4) \end{cases}$$

Quadrando e sommando la (3) e la (4) si ha:

$$(\rho - L_1)^2 + (z - H)^2 = L_2^{\,2} + L_3^{\,2} + 2L_2 L_3 c_3$$

Robot a 4 dof: cinematica inversa - 3

Da cui si ricava:

$$\begin{cases} c_2 = \dfrac{(\rho - L_1)^2 + (z-H)^2 - L_2^2 - L_3^2}{2L_2 L_3} \\ s_3 = \pm\sqrt{1 - c_3^2} \end{cases}$$

La scelta del segno dipende dalla configurazione del gomito desiderata:

– $\Rightarrow$ gomito in su

+ $\Rightarrow$ gomito in giù

E quindi:

$$\boxed{\theta_3 = \mathrm{atan2}(s_3, c_3)}$$

Robot a 4 dof: cinematica inversa - 4

Ricavato θ_3, risolviamo la (3) e la (4) in termini di θ_2:

$$\begin{cases} \rho - L_1 = (L_2 + L_3 c_3) c_2 - (L_3 s_3) s_2 \\ z - H = (L_2 + L_3 c_3) s_2 + (L_3 s_3) c_2 \end{cases}$$

Ponendo $\begin{cases} k_1 = L_2 + L_3 c_3 \\ k_2 = L_3 s_3 \end{cases}$

si ha: $\begin{cases} \rho - L_1 = k_1 c_2 - k_2 s_2 \\ z - H = k_1 s_2 + k_2 c_2 \end{cases}$

Robot a 4 dof: cinematica inversa - 5

Scriviamo k_1 e k_2 come:

$$\begin{cases} k_1 = r \cos\gamma \\ k_2 = r \sin\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \\ \gamma = \text{atan2}(k_2, k_1) \end{cases}$$

Quindi: $\begin{cases} \rho - L_1 = r c_\gamma c_2 - r s_\gamma s_2 = r \cos(\gamma + \theta_2) \\ z - H = r c_\gamma s_2 + r s_\gamma c_2 = r \sin(\gamma + \theta_2) \end{cases}$

Ovvero: $\tan(\gamma + \theta_2) = \dfrac{z - H}{\rho - L_1}$

Robot a 4 dof: cinematica inversa - 6

E quindi: $$\boxed{\theta_2 = \mathrm{atan2}(z - H, \rho - L_1) - \gamma}$$

dove: $$\gamma = \mathrm{atan2}(k_2, k_1) = \mathrm{atan2}(L_3 s_3,\ L_2 + L_3 c_3)$$

Infine, dalla (1) si ricava:

$$\boxed{\theta_4 = \alpha - \theta_2 - \theta_3}$$