L'educazione Matematica, Anno XXXVII-Serie X, Vol. 6, N. 2, pp. 9-26, Agosto 2016.

L'importanza della Matematica nell'Era Tecnologica

Giorgio Buttazzo

Laboratorio di Sistemi in Tempo Reale
Scuola Superiore Sant'Anna, Pisa

Sommario

La matematica ha svolto sempre un ruolo fondamentale in tutti i campi dell'ingegneria, ma è diventata ancora più cruciale in quei settori relativamente più innovativi, come l'informatica, la robotica, la grafica computerizzata, la visione artificiale e l'intelligenza artificiale, dove la computazione è spesso basata su modelli matematici della realtà.

Nonostante il ruolo essenziale che la matematica svolge nello sviluppo tecnologico della società moderna, essa viene spesso insegnata trascurando ogni collegamento con le applicazioni reali che essa consente di realizzare. La conseguenza è che per la maggior parte degli studenti la matematica può risultare noiosa, poiché considerata inutile e fine a se stessa, con il rischio elevato che molti risultati importanti siano imparati e memoria, per essere presto dimenticati. Per evitare che ciò accada, è importante fornire agli studenti degli esempi concreti che illustrino le potenzialità e le applicazioni delle varie tecniche matematiche introdotte nel programma di studio.

Questo articolo illustra alcuni esempi applicativi dei metodi matematici utilizzati in diversi settori dell'ingegneria, allo scopo di fornire delle motivazioni che possano entusiasmare lo studente ad affrontare lo studio della matematica in modo più costruttivo e consapevole.

1. Introduzione

E' utile osservare che la scienza e l'ingegneria si pongono obiettivi diversi nell'affrontare lo studio del mondo che ci circonda. Infatti, mentre la scienza è interessata a comprendere il funzionamento di ciò che già esiste in natura, l'ingegneria è interessata a risolvere problemi pratici, inventando qualcosa di nuovo che non esiste in natura. In altre parole, la scienza è interessata al mondo così com'è, mentre l'ingegneria si pone lo scopo di cambiare il mondo, attraverso la ricerca e lo sviluppo di nuove tecnologie.

Quando si parla di ricerca scientifica, a volte si tende a distinguere tra *ricerca di base* e *ricerca applicata*, indicando come ricerca di base uno studio finalizzato ad avanzare la conoscenza, indipendentemente da benefici immediati, e come ricerca applicata un processo finalizzato ad ottenere risultati pratici a breve termine utili alla società. Questa distinzione, tuttavia, crea una grossa confusione sul significato di ricerca applicata, che spesso viene confusa con lo sviluppo di tecniche per realizzare prodotti industriali. E' bene invece chiarire che

uno studio finalizzato a produrre prodotti specifici, senza alcun obiettivo di lungo termine o implicazioni generali, è semplicemente una ricerca scadente.

La ricerca di buona qualità è sempre caratterizzata da uno studio scientifico rigoroso finalizzato ad *avanzare la conoscenza* e produrre nuovi risultati che *prima o poi* saranno utili alla società. Secondo questa visione, una ricerca è applicata non se si concentra su un prodotto, ma se produce *risultati generali* che qualcun altro è capace di sfruttare per costruire qualcosa di utile. Di conseguenza,

La convinzione purtroppo diffusa (soprattutto tra i politici) secondo cui lo studio teorico non sia utile alla società è assolutamente sbagliata!

Un buon metro per valutare l'impatto sociale di un risultato è quello di misurare il numero di persone che ne beneficiano, dove il beneficio può essere misurato, ad esempio, in termini di tempo o costo risparmiato per persona. E' quindi evidente che maggiore è la generalità di un risultato, maggiore sarà il suo impatto sociale. A prova di ciò, basti osservare che tutta la tecnologia moderna esiste grazie ai risultati raggiunti dalla scienza fondamentale. Navi, treni, automobili, aerei, e missioni spaziali sono possibili primariamente grazie alla meccanica classica di Newton e Galileo; motori elettrici, trasmissioni radio e televisione esistono grazie alla teoria sull'elettromagnetismo di Faraday e Maxwell; l'energia atomica e navigatori satellitari si basano sulla teoria della relatività di Einstein; e l'elettronica, i computer e gli smartphone sono stati possibili grazie alla meccanica quantistica di Schrödinger e Heisenberg.

E’ interessante osservare che nessuno dei padri di queste teorie avrebbe potuto immaginare lo straordinario impatto che esse avrebbero avuto nella società futura. Essi non erano motivati dall’applicazione, ma dalla curiosità!

Nel campo ingegneristico, la generalità di un risultato può essere ottenuta grazie all’uso di modelli matematici che astraggono (idealizzano) il comportamento di un sistema fisico, descrivendolo in termini di variabili ed equazioni, che possono quindi essere analizzate e risolte per trovare la soluzione al problema. La generalità è data dal fatto che, essendo il modello descritto per mezzo di variabili, queste possono essere modificate per adattare il problema a diversi casi specifici. Tale processo di astrazione è schematicamente illustrato in Figura 1.

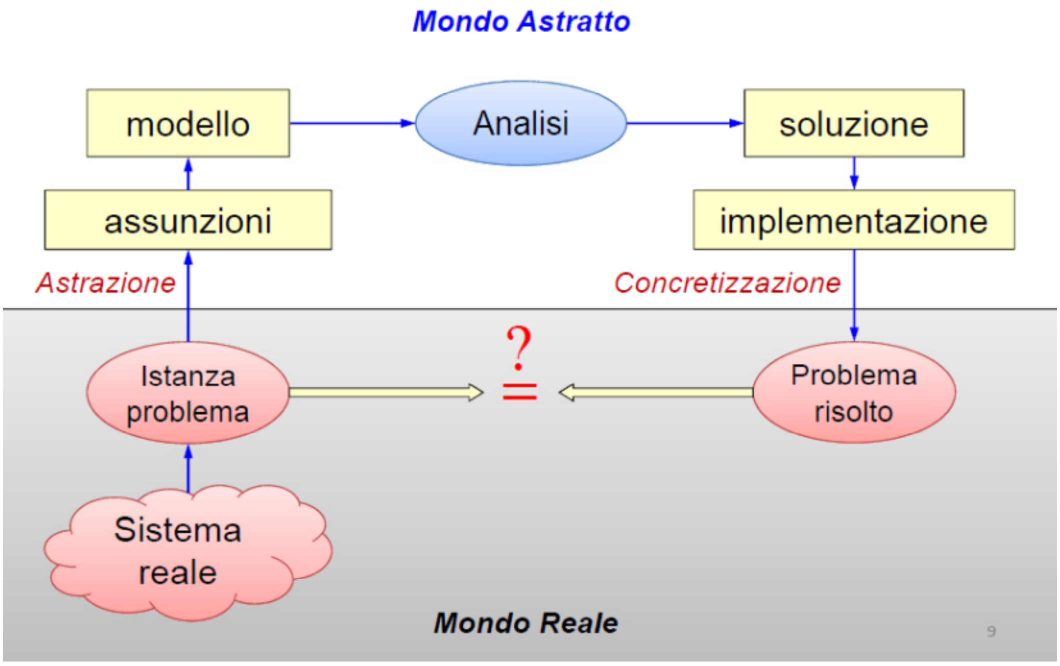


Figura 1: Il processo di astrazione.

Come si può notare, se da un lato il modello consente una generalizzazione dei risultati, dall’altro richiede inevitabilmente una semplificazione che allontana il sistema dalla realtà fisica. Tale semplificazione, tuttavia, si rende necessaria al fine di contenere la complessità del modello e ottenere una formulazione *trattabile* del problema, ossia risolvibile in tempi relativamente brevi. Dato che il problema risolto non si riferisce esattamente al sistema reale, ma al sistema astratto, una fase importante di tale processo è la verifica sperimentale della soluzione sul sistema fisico, necessaria per valutare gli errori introdotti dalla soluzione approssimata.

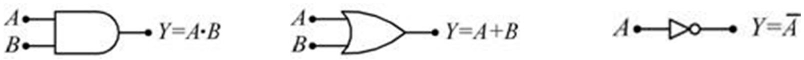
La conoscenza di metodi matematici è fondamentale sia nella fase di modellazione che nella fase di analisi, al fine di trovare una soluzione al problema.

Nell’Ingegneria Informatica i metodi matematici sono utilizzati per trattare numerosi problemi legati alla progettazione di architetture di calcolo, algoritmi e applicazioni informatiche. Tra le metodologie più utilizzate ricordiamo l’Algebra di Boole, le equazioni differenziali, le trasformate di Laplace e Fourier, la trigonometria, la cinematica, e la teoria dei grafi. Di seguito sono riportati alcuni esempi che illustrano l’uso di queste metodologie su svariati tipi di problemi.

2. Algebra di Boole

L’Algebra di Boole è alla base del funzionamento dei calcolatori e permette di descrivere le relazioni logiche tra variabili binarie che possono assumere solo due valori: VERO (1) o FALSO (0). Essa è utilizzata per progettare i circuiti digitali e le porte logiche con cui sono costruiti i microprocessori che si usano nei calcolatori elettronici e nei cellulari. La Figura 2 riporta alcuni esempi di operazioni logiche che si possono definire sui bit.

Operazioni di base



AND

A	B	$Y = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR

A	B	$Y = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT

A	$Y = \overline{A}$
0	1
1	0

Figura 2: Esempi di operazioni logiche sui bit.

L'algebra di Boole può essere anche utilizzata per ragionare su espressioni logiche. Ad esempio, l'implicazione è un'operazione logica tra due proposizioni A e B, indicata come $A \Rightarrow B$ e caratterizzata dalla seguente tabella di verità:

IMPLICAZIONE

A	B	$Y = A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

In altre parole, l'operazione $A \Rightarrow B$ richiede che la prima proposizione sia vera per stabilire la verità o falsità dell'implicazione. Una proposizione antecedente falsa non può implicare alcunché. Applicando le regole appena viste dell'algebra di Boole, si può facilmente dimostrare che, se A e B sono due proposizioni, allora

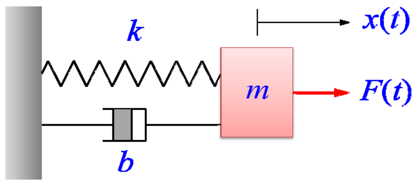
$$\boxed{A \Rightarrow B \text{ è equivalente a } \overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$$

che è la proprietà su cui si fondano tutte le dimostrazioni per assurdo. Secondo questa metodologia dimostrativa, si assume l'ipotesi A vera, si nega la tesi B e si cerca di dimostrare che l'ipotesi è falsa, ottenendo quindi una contraddizione, visto che si era partiti assumendo l'ipotesi A vera.

3. Equazioni differenziali

Le equazioni differenziali sono equazioni che legano una funzione incognita $x(t)$ alle sue derivate. L'importanza delle equazioni differenziali nell'ingegneria deriva dal fatto che esse permettono di descrivere il comportamento dinamico di sistemi fisici.

Si consideri, ad esempio, un corpo di massa m collegato ad una molla con costante elastica k e ad uno smorzatore con coefficiente di smorzamento b, come illustra la Figura 3. Detta $x(t)$ la posizione della massa al tempo t, la forza $F(t)$ a cui è soggetto il corpo in ogni istante può essere espressa come la somma di tre componenti, una componente inerziale proporzionale alla massa m e all'accelerazione del corpo (derivata seconda della posizione), una componente viscosa proporzionale a b e alla velocità (derivata prima della posizione) e una componente elastica proporzionale a k e alla posizione $x(t)$.



$$F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k\,x \tag{1}$$

Figura 3: Sistema massa-molla-smorzatore.

Nota la posizione iniziale del corpo all'instante $t = t_0$, risolvendo tale equazione è possibile descrivere la posizione del corpo in qualsiasi istante t e per qualsiasi valore dei parametri (m, k, b).

L'unico problema delle equazioni differenziali è che sono difficili da risolvere. Fortunatamente, nel 1812, Pierre-Simon de Laplace ideò un metodo per semplificarne la soluzione, oggi noto come *Trasformata di Laplace*.

4. Trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace consente di risolvere un'equazione differenziale in forma algebrica trasformando una funzione di una variabile reale t (tempo) in una funzione di variabile complessa s.

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) \triangleq \int_0^{\infty} f(t)\; e^{-st}\; dt \tag{2}$$

Dunque, anziché risolvere un'equazione differenziale nel dominio del tempo, il metodo di Laplace consiste nel trasformare l'equazione differenziale in una equazione algebrica, risolverla con metodi classici, e quindi riconvertirla (applicando l'anti-trasformata di Laplace) nel dominio del tempo. Tale procedimento risolutivo è schematicamente illustrato in Figura 4.

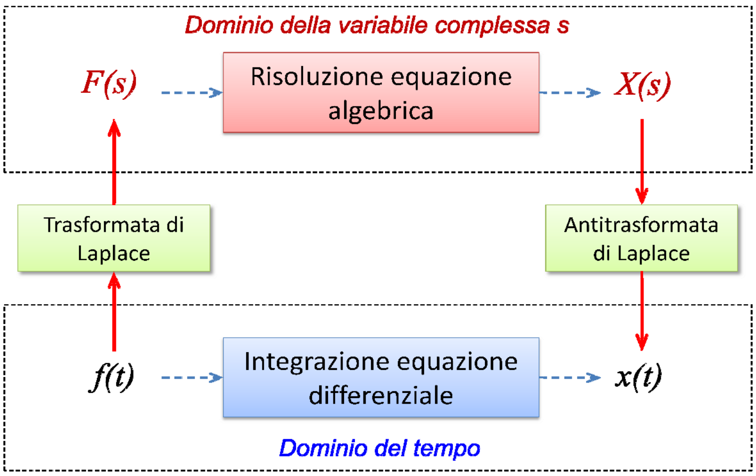
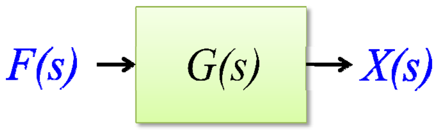


Figura 4: Schema risolutivo di equazioni differenziali mediante il metodo di Laplace.

E' interessante notare che, detta $X(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $x(t)$, la trasformata della derivata di $x(t)$ è $sX(s)$, mentre la trasformata dell'integrale di $x(t)$ è $X(s)/s$. Dunque la trasformata di Laplace dell'Equazione (1) risulta:

$$F(s) = m\,s^2 X(s) + b\,s\,X(s) + k\,X(s) \tag{3}$$

Se $F(t)$ rappresenta una funzione d'ingresso nota, mentre $x(t)$ rappresenta la funzione di uscita che vogliamo calcolare, il rapporto tra le trasformate di uscita e d'ingresso definisce quella che si chiama *Funzione di trasferimento* del sistema, indicata con $G(s)$, e schematicamente illustrata in Figura 5.



$$F(s) = (ms^2 + bs + k)X(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Figura 5: Esempio di funzione di trasferimento per il sistema massa-molla-smorzatore illustrato in Figura 3.

Un’altra grande invenzione matematica, al pari della trasformata di Laplace, è la Trasformata di Fourier.

5. Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier consente di esprimere una qualsiasi forma d’onda come una somma di sinusoidi di ampiezza e frequenza opportune:

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)] \tag{4}$$

La Figura 6 illustra il concetto di scomposizione che è alla base della Trasformata di Fourier.

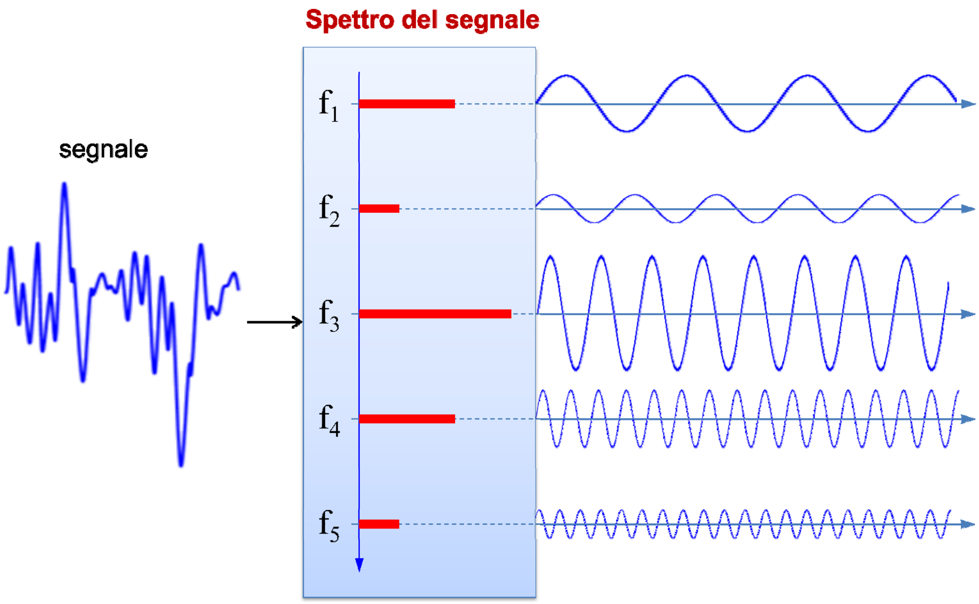


Figura 6: Ogni segnale temporale può essere scomposto e ricostruito come somma di segnali sinusoidali aventi ampiezza e frequenza opportune.

E’ interessante osservare che il sistema uditivo umano sfrutta la scomposizione frequenziale attraverso la coclea, un apparato osseo dell’orecchio interno a forma di spirale che entra in risonanza in posizioni diverse a seconda della frequenza dell’onda acustica. Come illustrato in Figura 7, un fascio di nervi attaccati lungo tale osso (*nervo cocleare*) preleva le diverse vibrazioni, effettuando di fatto una conversione in frequenza dell’onda acustica.

Per meglio comprendere il concetto di composizione frequenziale, la Figura 8 mostra un segnale temporale (in rosso) confrontato con diverse approssimazioni (in blu) ottenute sommando un numero N crescente di funzioni sinusoidali. Si noti come già con 8 funzioni a frequenza diversa, il segnale possa essere approssimato con un errore molto ridotto.

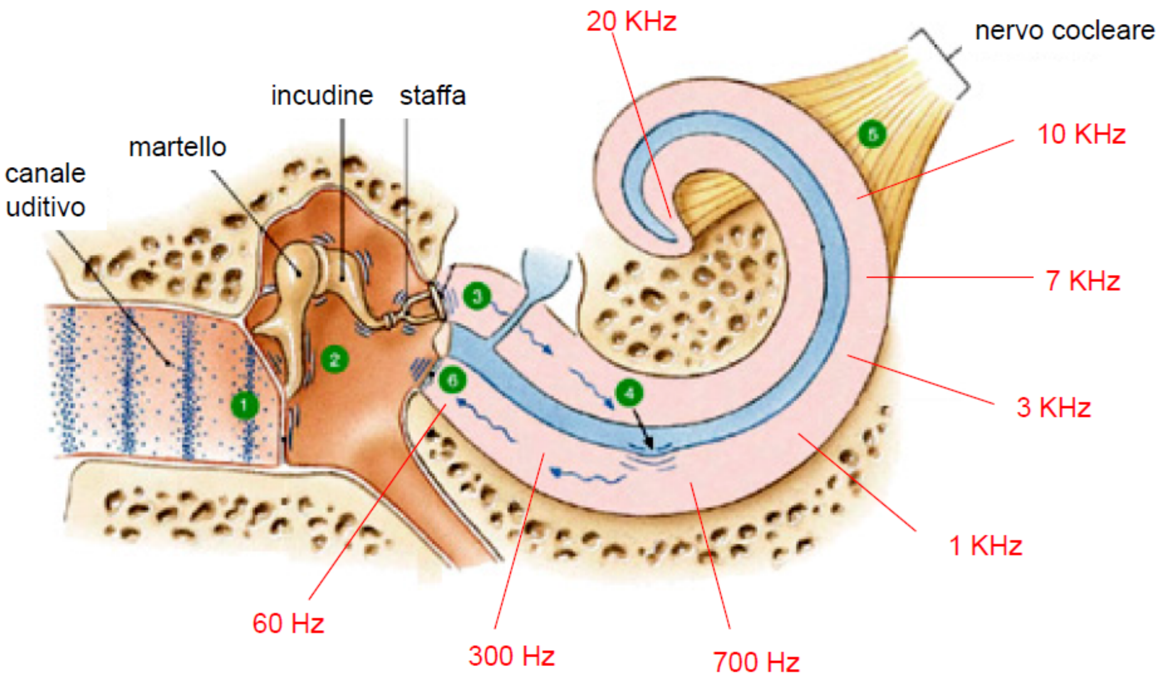


Figura 7: Schema di funzionamento del sistema uditivo umano.

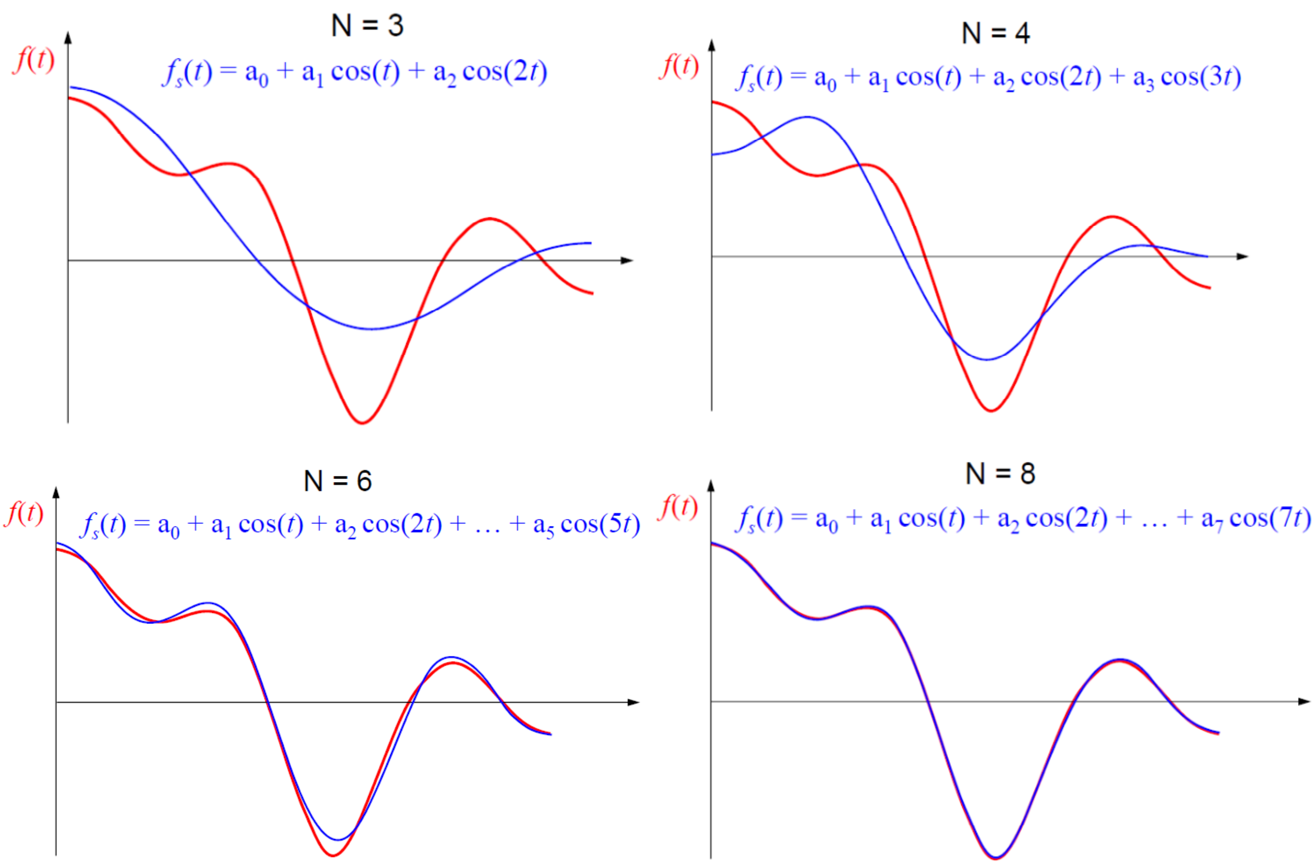


Figura 8: Un segnale temporale (in rosso) confrontato con diverse approssimazioni (in blu) ottenute sommando un numero N crescente di funzioni sinusoidali.

Il risultato straordinario del metodo Fourier è che esso è in grado di rappresentare anche funzioni discontinue. Un esempio di funzione discontinua approssimata è illustrato in Figura 9.

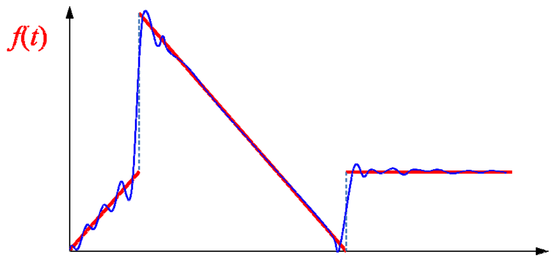


Figura 9: Un esempio di approssimazione di una funzione discontinua.

Questo risultato creò grande scompiglio tra i matematici dell'epoca, tra cui Lagrange, Laplace, Poisson, ed Eulero, i quali non credevano che ciò fosse possibile. L'espressione di segnali discontinui come somma di funzioni sinusoidali, tuttavia, richiede un gran numero di termini per ottenere un'approssimazione accurata. La Figura 10 illustra alcuni esempi di come una forma d'onda rettangolare possa essere approssimata utilizzando un numero crescente di segnali sinusoidali; a destra di ogni forma d'onda approssimata è mostrato il corrispondente spettro, ossia l'ampiezza delle componenti sinusoidali che compongono il segnale approssimato.

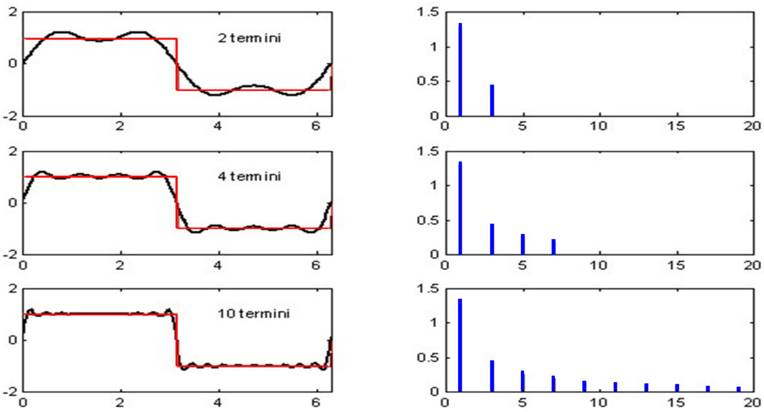


Figura 10: Esempi di approssimazione di un'onda rettangolare
con un numero crescente di segnali sinusoidali.

Una variante della trasformata di Fourier è utilizzata nell'algoritmo di compressione delle immagini JPEG per ridurre la dimensione dei file immagine. A differenza di un segnale temporale, che viene rappresentato come una sequenza di sinusoidi, un'immagine viene scomposta in una serie di immagini elementari (funzioni di due dimensioni spaziali) del tipo mostrato in Figura 11.

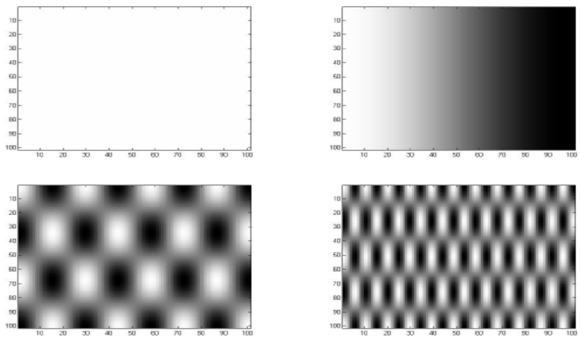


Figura 11: Esempi di funzioni elementari utilizzate nell'algoritmo di compressione JPEG.

Si osservi che un'immagine a colori di 800 x 600 pixel, in cui ognuno dei tre colori fondamentali (rosso, verde, blu) è quantizzato su 256 livelli, e quindi occupa su un byte (8 bit) di informazione, richiede una quantità di memoria pari a 800 x 600 x 3 byte = 1.44 Mbyte. Utilizzando il formato JPEG, invece la stessa immagine richiede meno di 120 Kb, ottenendo pertanto un risparmio di oltre il 90% di memoria. E' bene tuttavia osservare che la compressione JPEG causa una perdita di informazione, e la qualità dell'immagine compressa è tanto migliore quanto più è elevato il numero di funzioni elementari che si vanno sommare (così come si è visto per l'esempio di Figura 8).

La trasformata di Fourier è usata in moltissimi settori dell'ingegneria: in elettronica, per l'elaborazione e il filtraggio di segnali elettrici; nell'informatica, per elaborazione di suoni e la compressione di immagini; in musica, per la sintesi sonora e le elaborazioni timbriche; in medicina, per l'analisi di segnali fisiologici; in astrofisica, per l'analisi della composizione di corpi celesti; in geotecnica, per il sondaggio di terreni nella ricerca del petrolio; in chimica, per l'analisi molecolare di sostanze organiche; in meccanica, per la diagnostica di ingranaggi e strutture meccaniche; e in tanti altri settori della scienza.

6. Trigonometria

La trigonometria è la parte della matematica che studia i triangoli, ossia le relazioni tra gli elementi che li caratterizzano, come lati, angoli, e mediane. Essa risulta fondamentale nella grafica computerizzata, per gestire le rotazioni di oggetti, e nella robotica per calcolare le rotazioni dei vari giunti di un robot.

Ad esempio, per disegnare un poligono al computer occorre fornire al programma le coordinate dei suoi vertici rispetto ad una terna fissa {F} di riferimento. Tuttavia, se vogliamo successivamente ridisegnare il poligono in posizioni e orientazioni diverse, è necessario ricalcolare le coordinate dei vertici in funzione dei parametri di traslazione e rotazione. A tal fine, conviene definire una terna mobile {M} solidale all'oggetto, come illustrato in Figura 12.

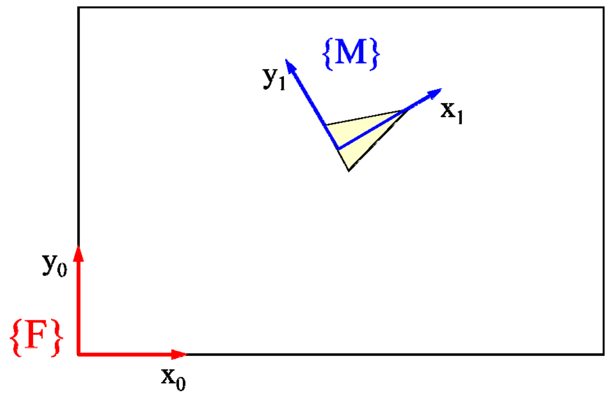
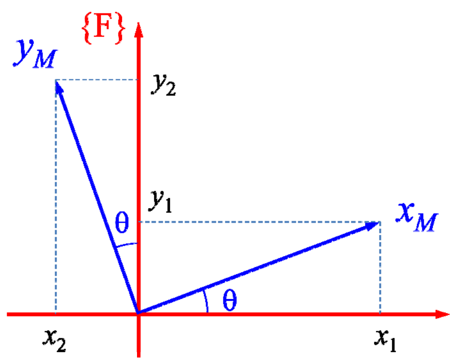


Figura 12: Le coordinate di un poligono possono essere convenientemente espresse rispetto ad una terna di riferimento fissa {F} oppure rispetto ad una terna mobile {M} solidale al poligono.

La terna mobile {M} rispetto a quella fissa {F} può essere espressa mediante:

- un vettore di traslazione P_0, che rappresenta le coordinate dell'origine di {M} rispetto a {F};
- una matrice di rotazione R, che rappresenta le coordinate dei versori di {M} rispetto a {F}.

Indicando con (x, y) le coordinate dell'origine {M} rispetto a {F}, e con (x_1, y_1) e (x_2, y_2) le coordinate dei due versori x_M e y_M, rispetto a {F}, si avrà che P_0 ed R sono espressi come indicato in Figura 13.



$$x_M : \begin{cases} x_1 = \cos\theta \\ y_1 = sen\theta \end{cases} \qquad P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$y_M : \begin{cases} x_2 = -sen\theta \\ y_2 = \cos\theta \end{cases} \qquad R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Figura 13: Vettore di traslazione P_0 e matrice di rotazione R della terna mobile {M} rispetto a quella fissa {F}.

Ora, dato un punto P^M di coordinate (a, b) espresso rispetto alla terna mobile {M}, questo può essere espresso rispetto alla terna {F} mediante la seguente trasformazione:

$$P^F = P_0 + R\ P^M \tag{5}$$

ed esplicitando i termini si ha:

$$P^F = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + a\cos\theta - bsen\theta \\ y + asen\theta + b\cos\theta \end{pmatrix} \tag{6}$$

Dunque, riprendendo l'esempio di Figura 12, una volta definite le dimensioni del triangolo, le coordinate dei sui vertici possono essere calcolate mediante la (6), come schematicamente illustrato in Figura 14.

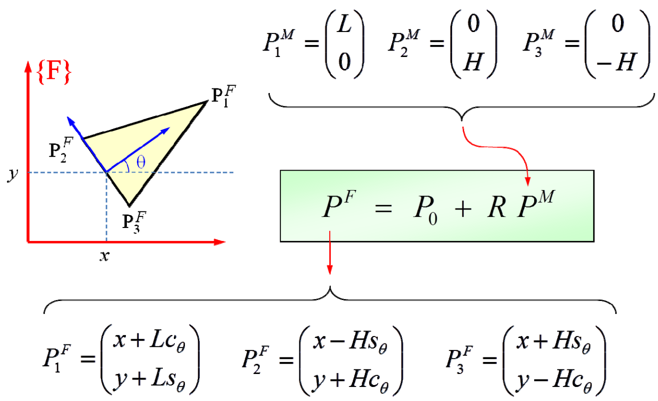


Figura 14: Trasformazione di coordinate dei vertici del triangolo dalla terna {M} a quella fissa {F}.

7. Cinematica

La cinematica è un ramo fisica che si occupa di descrivere quantitativamente il moto dei corpi, indipendentemente dalle cause del moto stesso. Una volta caratterizzata la traiettoria di un oggetto in funzione del tempo, le equazioni cinematiche costituiscono un potentissimo strumento matematico per prevedere la posizione futura dell'oggetto.

La cinematica risulta pertanto fondamentale nell'astronomia, per studiare il moto dei corpi celesti e prevedere il possibile impatto di meteoriti sulla Terra; nell'ingegneria aerospaziale, per pianificare le traiettorie di volo di satelliti e sonde spaziali; nell'ingegneria informatica, per progettare sistemi di frenata automatica per treni e automobili, sistemi di difesa (calcolo di traiettorie di missili), sistemi di localizzazione e controllo di droni, sistemi di tracciamento e inseguimento radar, ecc.

Ad esempio, utilizzando propriamente le note equazioni del moto accelerato:

$$x = x_0 + vt + \frac{1}{2}at^2 \tag{7}$$

$$v = v_0 + at \tag{8}$$

è possibile calcolare il tempo e lo spazio di frenata di un'auto che viaggia a velocità v_0, noto il coefficiente di attrito μ tra gomma e asfalto, necessario per a calcolare la decelerazione $a = \mu g$, dovuta alla frenata, dove g è l'accelerazione di gravità ($g \cong 9.8$ m/s^2). Successivamente, conoscendo i tempi di reazione di un essere umano, si può calcolare la durata minima del giallo in un semaforo per consentire una frenata in sicurezza. Oppure, si può determinare l'intervallo di campionamento massimo di un sensore di distanza da installare su un sistema di guida autonoma, per avere la certezza fermare il veicolo entro una data distanza di sicurezza. O ancora, è possibile calcolare l'istante in cui lanciare un missile di difesa contro un bersaglio tracciato via radar.

8. Teoria dei grafi

Un grafo è una struttura astratta formata da un insieme di *nodi* (o *vertici*) collegati da un insieme di *archi*, i quali possono anche avere una direzione (in tal caso il grafo viene detto *diretto*). Data la generalità del formalismo, i grafi possono essere utilizzati per rappresentare relazioni tra oggetti di qualunque tipo e, pertanto, la teoria dei grafi trova largo impiego in numerosi campi della scienza.

Ad esempio, una rete stradale o ferroviaria può essere modellata come un grafo in cui i nodi rappresentano gli incroci e gli archi i tratti di strada fra due incroci. Nel caso della rete Internet, i nodi rappresentano le pagine web e gli archi (orientati) i collegamenti (link) ad esse. In Facebook, i nodi sono gli utenti e gli archi i legami di amicizia. In una molecola, i nodi sono atomi e gli archi i legami chimici. In un torneo sportivo i nodi rappresentano le squadre e gli archi gli incontri fra esse.

Sia ai nodi che agli archi possono essere associate delle variabili che codificano le informazioni di interesse del problema che si sta modellando. La Figura 15 illustra un esempio di grafo diretto utilizzato per rappresentare le relazioni di precedenza tra gli elementi di una computazione parallela. Il numero all'interno di un nodo indica il tempo di calcolo di quel frammento di codice.

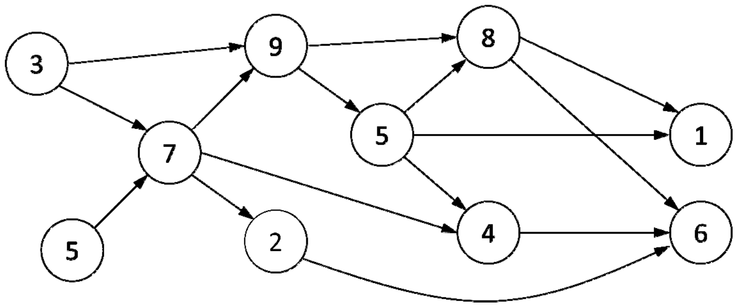


Figura 15: Esempio di grafo *diretto* utilizzato per rappresentare le relazioni esistenti tra gli elementi di una computazione parallela. Il numero all'interno di un nodo indica il tempo di calcolo di quel frammento di codice.

La teoria dei grafi si occupa di analizzare i grafi per derivarne proprietà di interesse, quali ad esempio, la lunghezza del cammino più breve, o più lungo, fra due nodi, l'esistenza di cicli, la raggiungibilità di un nodo, il numero di cammini alternativi, e così via.

Pertanto, nel settore dell'ingegneria informatica, la teoria dei grafi è uno strumento indispensabile per la modellazione, l'analisi e la simulazione di reti di calcolatori, architetture di calcolo parallelo, programmi paralleli, algoritmi di ricerca, sistemi discreti e macchine a stati. Un'applicazione interessante dei grafi è la modellazione di reti neurali (o neuronali), ossia sistemi di calcolo altamente paralleli ispirati al funzionamento del cervello.

9. Reti neurali artificiali

Lo studio del cervello ha permesso di sviluppare delle reti neurali artificiali in grado di realizzare memorie associative, riconoscere suoni e immagini, classificare stimoli sensoriali e, soprattutto, apprendere, ossia modificare il proprio comportamento in base agli errori commessi.

Una rete neurale è un insieme di elementi di calcolo, detti neuroni, collegati tra loro attraverso dei *pesi sinaptici*, che possono essere eccitatori (> 0) o inibitori (< 0). La Figura 16 illustra un esempio di rete neurale con 5 neuroni, la cui uscita assume valori binari.

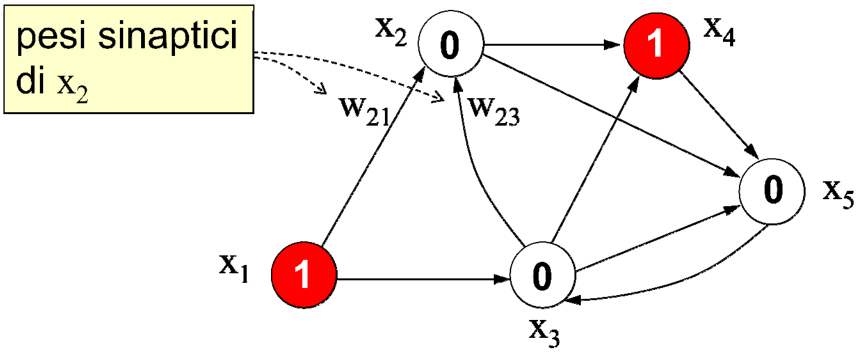


Figura 16: Esempio di una semplice rete neurale con 5 neuroni collegati tra loro mediante connessioni sinaptiche "pesate". Il numero all'interno di un nodo rappresenta lo stato del neurone, ossia il suo valore di uscita (in questo caso binario).

Ogni neurone riceve in ingresso un certo numero di segnali generati da sensori o provenienti da altri neuroni. Tali segnali vengono moltiplicati per dei pesi sinaptici e poi sommati tra loro per produrre un *valore di attivazione*, a, analogo al potenziale di membrana di una cellula nervosa. Tale valore viene poi sommato ad un ulteriore valore di soglia θ ed utilizzato per generare l'uscita vera e propria del neurone, attraverso una *funzione di uscita* $f(a)$. Pertanto, indicando con $x_1, x_2, \ldots, x_n$ le variabili di ingresso e con $w_1, w_2, \ldots, w_n$ i pesi ad esse associate, l'uscita di un neurone viene calcolata come:

$$y = f(a) = f\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i + \theta\right)$$

La Figura 17 illustra schematicamente il tipico modello di un neurone artificiale.

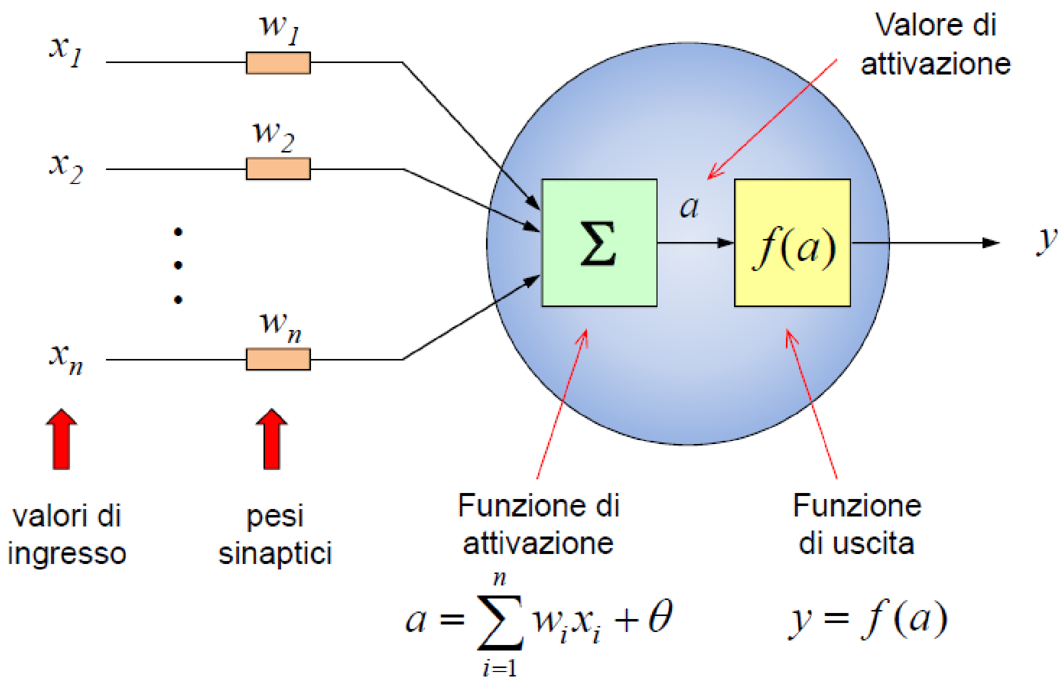


Figura 17: Modello di un neurone artificiale.

La Figura 18 illustra alcuni esempi di funzioni di uscita maggiormente utilizzate nelle reti neurali.

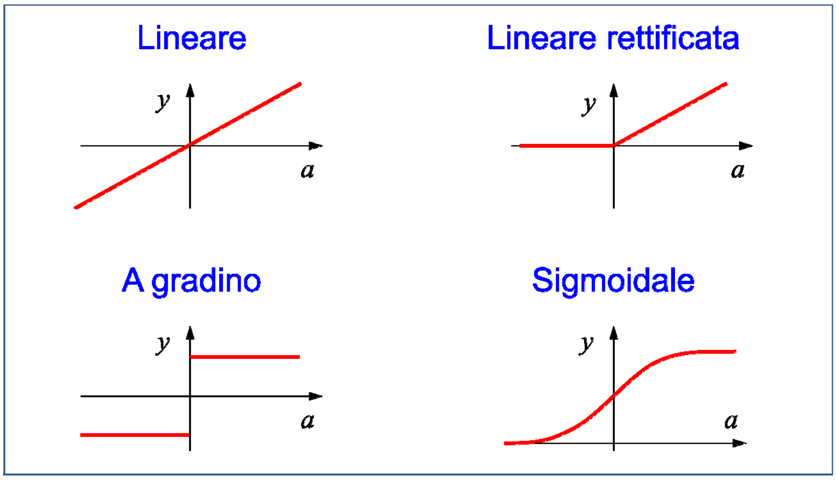


Figura 18: Esempi di funzioni di uscita.

Nel 1982, John Hopfield scoprì un metodo per memorizzare informazioni in una rete neurale al fine di realizzare una memoria associativa. Ad esempio la rete di Hopfield è in grado di memorizzare immagini e recuperale sulla base di immagini simili, rumorose o distorte. Egli dimostrò che tale proprietà può essere ottenuta se

- tutti i neuroni sono connessi tra loro;
- la funzione di uscita è la funzione segno;
- ogni coppia di neuroni ha pesi simmetrici;
- i neuroni cambiano stato uno per volta.

Sempre nel 1982, Tevuo Kohonen propose un modello di rete neurale capace di auto-organizzarsi per formare delle mappe sensoriali simili a quelle esistenti nella corteccia somatosensoriale, sulla quale viene rappresentato il cosiddetto "homunculus sensitivo".

Nel 1983, Andrew Barto, Richard Sutton e Charles Anderson riuscirono a sviluppare un nuovo modello di rete neurale in grado di apprendere azioni di controllo sulla base di "premi" e "punizioni".

Nel 1986, David Rumelhart, Geoffrey Hinton e Ronald Williams svilupparono un algoritmo di apprendimento, noto come Backpropagation, che permette ad una rete neurale di imparare problemi di classificazione attraverso un insieme di esempi. La rete riesce poi a generalizzare, classificando correttamente esempi mai visti durante la fase di apprendimento.

A partire dal 2006, la ricerca sulle reti neurali ha avuto una grossa impennata, grazie allo sviluppo di nuove tecniche di apprendimento che consentono di addestrare reti molto più grandi, costituite da migliaia di neuroni organizzati su numerosi strati, e pertanto chiamate "deep neural network".

Sfruttando la potenza computazionale delle moderne piattaforme di calcolo parallelo, tali reti sono in grado di risolvere problemi complessi, quali il riconoscimento di caratteri scritti a mano, immagini e volti umani, o il riconoscimento di suoni e voce. Le prestazioni ottenute, in termini di accuratezza del riconoscimento e capacità di generalizzazione, migliorano di anno in anno e risultano sempre più vicine alle capacità umane. Attualmente, le reti neurali vengono utilizzate dalle maggiori aziende informatiche, come Google, Microsoft e Facebook, per classificare l'enorme mole di dati esistente nei loro server, ma anche nei cellulari di ultima generazione, per la realizzazione di interfacce vocali, o nei sistemi di guida autonoma di veicoli, per il riconoscimento di scenari complessi.

10. Conclusioni

Questo lavoro ha illustrato alcuni esempi di come la matematica costituisca uno strumento indispensabile in diversi settori dell'ingegneria. In particolare, nel campo dell'ingegneria informatica, diverse tecniche matematiche sono utilizzate per modellare, analizzare e prevedere il comportamento di sistemi fisici. Codificando tali modelli in un programma ed eseguendo tale programma su un calcolatore è possibile simulare l'evoluzione del sistema al variare di un gran numero di parametri e condizioni iniziali, al fine di prevederne il comportamento in situazioni di interesse.

Tuttavia, la matematica viene spesso insegnata (a tutti i livelli, dalle scuole elementari all'università) come una sfilza di regole, teoremi e dimostrazioni, trascurando le motivazioni che rendono quei risultati o quegli strumenti importanti, e a volte indispensabili, nello sviluppo della tecnologia moderna. In assenza delle giuste motivazioni, la maggior parte degli studenti tende a considerare la matematica come un insieme di regole "aride", da mandar giù come pillole amare per superare l'esame. Poi immancabilmente succede, a chi decide di intraprende un lavoro nel settore tecnologico, di comprendere – ahimè troppo tardi – l'importanza di quei teoremi o di quei metodi studiati a memoria. E in questi casi viene di pensare: "però, se mi avessero detto cosa potevo farci con un'equazione differenziale, magari l'avrei studiata con maggiore interesse!".

Per appassionare gli studenti ad una materia (e questa considerazione vale per tutte le materie e a tutti i livelli di istruzione) è importante far vedere "a cosa può servire" nella vita, attraverso una serie di esempi concreti di come quel tipo di conoscenze sono state utilizzate per risolvere problemi pratici. Quando si riesce ad apprezzare l'utilità pratica di un metodo, ci si predispone più positivamente ad impararlo e ci si addentra più volentieri nei dettagli tecnici.

Al fine di attirare l'attenzione degli studenti su un argomento (a maggior ragione se astratto), i problemi posti e gli esempi forniti devono essere interessanti, attuali, stuzzicanti e, perché no, anche divertenti. In generale, per una migliore didattica, è importante integrare la teoria con una parte applicativa che illustri come la teoria possa essere utilizzata per costruire qualcosa che funzioni in pratica.

Naturalmente non sempre è facile, da parte di un docente, trovare motivazioni ed esempi interessanti e divertenti, e soprattutto mostrare realizzazioni pratiche di una teoria. Ma questo tipo di "ricerca" dovrebbe rientrare tra i compiti richiesti a un docente e far parte di corsi di formazione dedicati all'insegnamento. Tale compito è sicuramente agevolato dall'uso del computer o di strumenti multimediali, che possono essere di enorme supporto nello sviluppo di tali progetti.